পঞ্চম অধ্যায়

অসীম শূন্য

শূন্য এবং বৈজ্ঞানিক বিপ্লব

গণিত সাধারণত নীতিতে অনড় থাকে। কিন্তু অসীম পরিমাণ বড় অপ ছোট জিনিসের আগমন গণিতকে নীতিতে আপোষ করতে অভ্যস্ত করল। গাণিতক বিষয়সমূহের পরম ///বৈধতা/// ও অখণ্ডনীয় প্রমাণের আদিম অবস্থা চিরতরে বিদায় নিল।বিতর্কের যুগের উদ্বোধন হলো। আমরা সে বিন্দুতে পৌঁছে গেলাম, যেখানে মানুষ অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ করে বুঝে-শুনে নয়, বরং বিশ্বাসের জায়গা থেকে। কারণ, এখন পর্যন্ত এর ফলাফল সঠক এসেছে।

-- ফ্রিদরিখ এংগেলস।

শূন্য এবং অসীম এরিস্টটলীয় দর্শনকে গুঁড়িয়ে দিয়েছিল। শূন্যতা ও অসীমতা বাদামের খোসার মহাবিশ্বকে ধারণা বাতিল করে দিয়েছিল। বাতিল করে চিয়েছিল প্রকৃতির শূন্যস্থানকে অপছন্দ করার ধারণা। প্রাচীন জ্ঞান হয়ে গেল মূল্যহীন। বিজ্ঞানীরা প্রকৃতির ক্রিয়াকৌশল বিষয়ক সূত্র তৈরি করছিলেন। তবে এ বৈজ্ঞানিক বিপ্লবের মধ্যেও একটি অসুবিধা থেকে গেল: শূন্য। বিজ্ঞান জগতের তক্ষণ নতুন শক্তিশালী হাতিয়ার ক্যালকুলাস। কিন্তু এর গভীরে লুকিয়ে থাকল একটি প্যারাডক্স১। ক্যালকুলাসের উদ্ভাবক আইজ্যাক নিউটন ও গটফ্রিড উইলহেলম লিবনিজ///চেক বানান ও উচ্চারণ///। শূন্য দিয়ে ভাগ আর অসীমসংখ্য শূন্যকে যোগ করে তারা বানিয়ে ফেলেন গণিতের সবচেয়ে শক্তিশালী অস্ত্র। দুটো কাজই অবৈধ। এ যেন ১ + ১ = ৩ লেখা। মৌলিকভাবে ক্যালকুলাস গাণিতিক যুক্তি মেনে চলেনি। একে গ্রহণ করতে হলে নিতে হয় বিশ্বাসের আশ্রয়। বিজ্ঞানীরা তা করলেন। কারণ ক্যালকুলাস হলো প্রকৃতির ভাষা। এ ভাষাটা ভাল করে বুঝতে হলে অসীম শূন্যকে জয় করা চাই।

ইউরোপ ঘুমিয়ে কাঁটাল এক হাজার বছর। খৃষ্টীয় ফাদাররা দারুণ দক্ষতায় সে ঘুমের খাইয়ে দিয়েছিল। ইউরোপীয়রা সে ঘুম থেকে জেগে উঠল শূন্যকে সাথে নিয়ে।

-- টোবিয়াস ড্যান্টসিগ, নাম্বার: দ্য ল্যাংগুয়েজ অব সায়েন্স

শূন্যের অভিশাপ গণিতকে দুই হাজার বছর তাড়ীয়ে বেড়িয়েছিল। মনে হচ্ছিল অ্যাকিলিজকে আজীবন কচ্ছপের পেছনে ছুটতে হবে। ধরতে পারবে না কখনোই। জেনোর সরল ধাঁধাঁর মধ্যে লুকিয়ে ছিল অসীম। অ্যাকিলিজের অসীম ধাপ গ্রিকদের হতবুদ্ধি করে দিয়েছিল। তারা অসীম পদক্ষেপকে যোগ করার কথা ভাবেনি কভুও। যদিও অ্যাকিলিজের পদক্ষেপ ক্রমেই ছোট হয়ে শূন্যের দিকে এগোচ্ছিল। শূন্যের ধারণা ছাড়া আসলে এ যোগ করার সাধ্য তাদের ছিল না। তবে পশ্চিম শূন্যকে গ্রহণ করে নিলে গণিতবিদরা অসীমকে করায়ত্ত্ব করলেন। শেষ হলো অ্যাকিলিজের রেস।

জেনোর ধারায় অসীম অংশ আছে, সত্য। তবুও আমরা সবগুলো পদক্ষেপ যোগ করতে পারি। এরপরেও পাব সসীম মান। ১ + ১/২ + ১/৪ + ১/৮ + ... = ২। এ কৌশল প্রথম খাটান ব্রিটিশ যুক্তিবিদ রিচার্ড সুইসেথ। অসীম পদকে যোগ করে সসীম মান বের করেন তিনি। তিনি সংখ্যার একটি অসীম ধারা নেন। ১/২, ২/৪, ৩/৮, ৪/১৬, ..., n/2^n,…। এবার এদেরকে যোগ। পাওয়া যাচ্ছে দুই। দেখাই যাচ্ছে, ধারার সংখ্যাগুলো ক্রমেই শূন্যের কাছাকাছি হচ্ছে। কেউ হয়ত বলে ফলবেন, এ কারণই তো সসীম মান আসার জন্য যথেষ্ট। হায়! অসীম যদি এত সরল হত!

প্রায় একই সময়ের কথা। ফরাসি গণিতবিদ নিকোল ওরেম কাজ করছিলেন আরেকটি অসীম সংখ্যার ধারা নিয়ে। গালভরা নাম তরঙ্গ ধারা।

১/২ + ১/৩ + ১/৪ + ১/৫ + ১/৬ + ... জেনো এবং সুইসেথের ধারার মতোই পদগুলো শূন্যের দিকে যাচ্ছে। কিন্তু সুইসেথ এদেরকে যোগ করতে গিয়ে দেখেন, যোগফল ক্রমেই বড় থেকে আরও বড় হচ্ছে। প্রত্যেকটা পদ আলাদাভাবে শূন্যের দিকে গেলেও যোগফল যাচ্ছে অসীমের দিকে। পদগুলোকে গুচ্ছে গুচ্ছে রেখে ওরেম এটা দেখান। ১/২ + (১/৩ + ১/৪) + (১/৫ + ১/৬ + ১/৭ + ১/৮) + ...। প্রথম গুচ্ছের মান ১/২। পরের গুচ্ছ (১/৪ + ১/৪) বা ১/২-এর চেয়ে বড়। (কারণ তিন ভাগের এক ভাগ চার ভাগের এক ভায়ের চেয়ে বেশি) একইভাবে পরের গুচ্ছ (১/৮ + ১/৮ + ১/৮ + ১/৮) বা ১/২-এর চেয়ে বড়। এভাবেই চলছে। ক্রমেই ১/২ করে যোগ হচ্ছেই। যোগফলও বড় হচ্ছে। যাচ্ছে অসীমের দিকে। পদগুলো শূন্যের দিকে গেলেও তা যথেষ্ট দ্রুত হারে হচ্ছে না। তার মানে, সংখ্যারা নিজেরা শূন্যের দিকে গেলেও অসীম সংখ্যার যোগফল অসীম হতে পারে। তবুও অসীম যোগফলের সবচেয়ে বিস্ময়কর দিক কিন্তু এটা নয়। শূন্য নিজেও অসীমের অদ্ভুত বৈশিষ্ট্য থেকে মুক্ত নয়।

এই ধারাটার কথা ভাবুন:

১ - ১ + ১ – ১ + ১ - ১ + ১ – ১ + ১ - ...

এর যোগফল শূন্য দেখানো কঠিন কিছু নয়। কত সহজ কাজ:

(১ – ১) + (১ – ১) + (১ – ১) + (১ – ১) + (১ – ১) + ... = ০ + ০ + ০ + ০ + ০ + ...

অতএব শূন্য। কিন্তু অন্যভাবে দেখুন।

১ + (-১ + ১) + (-১ + ১) + (-১ + ১) + (-১ + ১) + (-১ + ১) + …

একে লেখা যায়

১ + ০ + ০ + ০ + ০ + ০ + …

যার মান ১। শূন্যের অসীম যোগফল একইসাথে ০ ও ১ হতে পারে। ইতালীয় পুরোহিত গুইডো গ্রান্ডি তো এই ধারা দিয়ে প্রমাণ করেন ঈশ্বর শূন্য (০) থেকে মহাবিশ্ব (১) সৃষ্টি করতে পারেন। আসলে এই ধারাকে যেকোনো কিছুর সমান প্রমাণ করা যায়। তা করতে হলে ১ ও (-১) এর বদলে ৫ ও (-৫) দিয়ে শুরু করুন (অথবা মূল ধারা থেকেই ৫টি ১ বের করে নিয়ে বাকিদেরকে (১ - ১) + (১ – ১) + ... এভাবে লিখুন।

অসীমসংখ্যক জিনিসকে নিজেদের সাথে যোগ করলে অদ্ভুত ও অস্বাভাবিক ফলাফল পাওয়া যায়। কখনো সংখ্যারা শূন্যের দিকে যোগফল হয় নির্দিষ্ট কোনো সংখ্যা। ২ বা ৫৩-এর মতো নাদুসনুদুস কোনো সংখ্যা। কখনো আবার যোগফল ধেয়ে চলে অসীমের দিকে। শূন্যের অসীম যোগফল আবার যেকোনো কিছুর সমান হতে পারে। কী অদ্ভুত কাণ্ড ঘটে চলছে! কেউ জানত না কীভাবে অসীমকে করায়ত্ত্ব করা যায়।

ভাগ্য ভাল যে গাণিতিক জগতের চেয়ে ভৌত জগতটাকে বেশি অর্থবহ লাগে। বাস্তব জগতে কাজ করলে আর অসীমসংখ্যক জিনিসকে যোগ করাটা কাজেও আসে। যেমন ধরুন পাত্রের আয়তন বের করতে গেলে কাজটা করা লাগতে পারে। ১৬১২ সাল ছিল এমন কাজের উপযুক্ত একটি সময়।

এখানেও নায়ক জোহানেস কেপলার। যিনি গ্রহদের উপবৃত্তাকার পথের প্রমাণ দিয়েছিলেন। ঐ বছরটিতে তিনি পাত্রের আয়তন নিয়ে মগ্ন থাকেন। তিনি খেয়াল করেছিলেন পাত্রের নির্মাতা ও ব্যবহারকারীরা কাজটা করে খুব কাঁচা হাতে। কেপলার তাদের সাহায্যে কাজে নেমে পড়লেন। মনে মনে তিনি পাত্রকে অসীমসংখ্যক অসীম পরিমাণ ক্ষুদ্র খণ্ডে বিভক্ত করলেন। এরপর আবার তাদেরকে জোড়া দিয়ে পাত্রের আয়তন বের করলেন। পাত্রের পরিমাপের পেছনমুখী পদ্ধতি মনে হতে পারে একে। তবে ভাবনাটি ছিল চমৎকার।

সমস্যাটাকে সহজ করে বলা যাক। ত্রিমাত্রিক বস্তুর বদলে দুই মাত্রার একটি জিনিস কল্পনা করি। ধরুন একটি ত্রিভুজ। ২৩ নং চিত্রের ত্রিভজের উচ্চতা ও ভূমি ৮ একক করে। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল পেতে ভূমি ও উচ্চতা গুণ করে দুই দিয়ে ভাগ দিতে হয়। অতএব এ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ৩২ একক।

এবার ধরুন অন্যভাবে আমরা ক্ষেত্রফল বের করব। ত্রিভুজের ভেতরে অনেকগুলো আয়তক্ষেত্র বানিয়ে সেগুলোর ক্ষেত্রফল যোগ করব। প্রথম চেষ্টায় আমরা পাচ্ছি ১৬ একক (৪×৪)। যা মূল ক্ষেত্রফল থেকে অনেক কম। পরেরবার আরেকটু ভাল ফল এসেছে। এবার নিয়েছি তিনটি আয়ত। এবার পেলাম ২×২ + ২×৪ + ২×৬ = ২৪ একক। আগের চেয়েও ভাল হলেও মূল মান থেকে বেশ দূরে এখনও। তৃতীয় চেষ্টায় পাই ২৮। বোঝাই যাচ্ছে, আয়তক্ষেত্রকে ক্রমশ ছোট করতে থাকলে এদের মোট ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের খুব কাছাকাছি হয়। অনেক ছোট আয়তদের Δx চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়। Δx ছোট হওয়া আমনে আসলে শূন্যের দিকে যাওয়া। (এ আয়তদের যোগফল হলো Σf(x), যেখানে গ্রিক বর্ণ Σ (সিগমা) হলো একটি উপযুক্ত পরিসরের যোগফল বা সমষ্টির প্রতীক। আর f(x) হলো আয়তক্ষেত্রগামী রেখার সমীকরণ। আধুনিক প্রতীকে Δx শূন্যের দিকে যেতে থাকলে Σ চিহ্নকে নতুন আরেকটি প্রতীক ∫ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। আর ∫ এর সাথে dx বসিয়ে সমীকরণকে ∫f(x)dx লেখা হয়। এর নাম ইন্টিগ্র্যাল বা যোগজ।

চিত্র ২৩: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল পরিমাপ

কেপলারের এ কাজটার কথা বেশি মানুষ জানে না। তবে এ কাজটিই তিনি করেছিলেন তিন মাত্রায়। ব্যারেলের আয়তন পরিমাপ করতে গিয়ে। এর জন্য তিনি ব্যারেলকে কেটে বিভিন্ন তল বানান। পরে এদের আয়তন যোগ করে পান পাত্রের আয়তন। শূন্য নিয়ে একটা সমস্যা ছিল। তবে কেপলার সে সমস্যার চোখ রাঙানি করে কাজ চালিয়ে যান। Δx এর মান শূন্যের দিকে যেতে থাকলে অসীমসংখ্যক শূন্যকে যোগ করতে হয়। যার কোনো অর্থই নেই। কেপলার এ সমস্যা উপেক্ষা করেন। যুক্তির বিচারে অসীমসংখ্যক শূন্যকে যোগ করা অর্থহীন কাজ হলে কাজটার ফলাফল পাওয়া গেল যথাযথ।

বস্তুকে অসীম পরিমাণ ছোট করার মতো বিখ্যাত বিজ্ঞানী কেপলার একাই নন। অসীম ও অসীম পরিমাণ ক্ষুদ্র এসব খণ্ডের কথা নিয়ে ভেবেছিলেন গ্যালিলেওও। এই দুটি ধারণা আমাদের সসীম জ্ঞানের পরিধির বাইরে। তিনি লেখেন, “প্রথমটি আমরা বুঝতে পারি না এর বিশালতার কারণে, আর পরেরটি এর তুচ্ছতার জন্য।" তবে অসীম শূন্য রহস্যময় হলেও গ্যালিলেও এর শক্তি অনুভব করতে পেরেছিলেন, "একবার ভাবুন দুটোকে একত্র করলে কী হতে পারে।" গ্যালিলেওর ছাত্র বোনাভেন্টুরা কাভালিয়েরি এর আংশিক উত্তর দিয়েছিলেন।

ব্যারেলের বদলে কাভালিয়েরি জ্যামিতিক বস্তু নিয়ে কাজ করেন। কাভালিয়েরির মতে ত্রিভুজের মতো সব ক্ষেত্রফলই অসীমসংখ্যক শূন্যদৈর্ঘ্যের রেখা দিয়ে গঠিত। আর আয়তন গঠিত অসীমসংখ্যক শূন্যউচ্চতার তল নিয়ে। এসব অবিভাজ্য রেখা ও তল ক্ষেত্রফল ও আয়তনের পরমাণুর মতো। এদেরকে আর ভাগ করা যাবে না। চিকন খণ্ড দিয়ে কেপলার ঠিক যেভাবে ব্যারেলের আয়তন মেপেছিলেন, কাভালিয়েরি সেভাবেই অসীমসংখ্যক অবিভাজ্য শূন্যকে যোগ করে জ্যামতিক বস্তুর ক্ষেত্রফল বা আয়তন বের করেন।

কাভালিয়েরির বক্তব্য জ্যামিতিকদের বিব্রত করে। শূন্য ক্ষেত্রফলের অসীমসংখ্যক রেখা যোগ করে দ্বিমাত্রিক ত্রিভুজ ছিলেন। একইভাবে অসীমসংখ্যক শূন আয়তনের তল যোগ করে ত্রিমাত্রিক কাঠামো পাওয়া যাবে না। সমস্যা আসলে একই জায়গায়: অসীম শূন্যের কোনো অর্থ নেই। তবে কাভালিয়েরির পদ্ধতি সবসময় সঠিক উত্তর দিচ্ছিল। অসীম শূন্যকে যোগ করার যুক্তিগত ও দার্শনিক সমস্যা গণিত্যবিদরা উপেক্ষা করেন। এর কারণও আছে। অসীম ক্ষুদ্র বা অবিভাজ্য ধারণার মাধ্যমে সমাধান মিলল দীর্ঘদিনের এক ধাঁধাঁর। এটা হলো স্পর্শকের সমস্যা। স্পর্শক হলো একটি রেখা, যা কোনো কার্ভকে শুধু স্পর্শ করে সোজা চলে যায়। মসৃণভাবে বেয়ে চলা একটি কার্ভের যেকোনো বিন্দুতেই এমন একটি রেখা থাকবে যা কার্ভকে আলতো করে স্পর্শ করে চলে যাবে। কার্ভকে স্পর্শ করবে একটিমাত্র বিন্দুতে। এটাই স্পর্শক। গণিতবিদরা দেখলেন, গতি নিয়ে কাজ করতে গেলে জিনিসটা খুব গুরুত্বপূর্ণ। ধরুন, সুতোয় একটি বল বেঁধে আপনার মাথার চারপাশে ঘোরাচ্ছেন। বল ঘুরবে বৃত্তাকার পথে। হথাৎ সুতো ছিঁড়ে গেলে বল এক দিকে উড়ে চলে যাবে। আর এ গমন পথ হবে স্পর্শক রেখা বরাবর।বল নিক্ষেপের সময় বেসবল খেলোয়াড়ের বাহু বৃত্তচাপের পথ বেয়ে ঘোরে। বল ছেড়ে দেওয়া মাত্রই সেটা চলে স্পর্শক বরাবর (চিত্র ২৪)। আবার ধরুন পাহাড় দিয়ে গড়িয়ে পড়া বল কোথায় এসে থামবে জানতে হলে বের করতে হবে কোথায় স্পর্শক অনুভূমিকের সমান্তরাল। স্পর্শক রেখা কম-বেশি খাড়া হতে পারে। এ পরিমাপের নাম ঢাল। পদার্থবিদ্যায় আছে যার কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য। ধরুন, একটি কার্ভ দিয়ে একটি বাইসাইকেলের অবস্থান প্রকাশ করা হলো। তাহলে স্পর্শক রেখার ঢাল বলে দেবে, কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু অতিক্রম করার সময় বাইসাইকেলের বেগ কত থাকবে।

চিত্র ২৪: স্পর্শক বরাবর গতি

এ কারণেই সতের শতকের বহু গণিতবিদ কোনো কার্ভের নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শক রেখার পরিমাপের জন্য বিভিন্ন পদ্ধতি উদ্ভাবন করেন। এ তালিকায় ইভানজেলিস্টা টরিসেলি, রেনে ডেকার্ট, ফরাসি ভদ্রলোক পিয়ের ডে ফের্মা (তাঁর শেষ উপপাদ্যের জন্য বিখ্যাত) আর ইংরেজ ভদ্রলোক আইস্যাক ব্যারো। তবে কাভালিয়েরির মতোই সবগুলোতেই অসীম ক্ষুদ্রের সমস্যা পাওয়া গেল।

কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শক আঁকতে হলে সবচেয়ে ভালো কাজ হলো অনুমান দিয়ে শুরু করা।

তথ্যনির্দেশ

১। স্ববিরোধী বক্তব্য বা দেখতে এক আসলে আরেক এমন জিনিসকে প্যারাডক্স বলে। যেমন, কেউ বলল, "আমি মিথ্যাবাদী।" তাহলে কি লোকটি আসলে মিথ্যাবাদী নাকি সত্যবাদী? এ বিষয়ে বিস্তারিত জানতে পড়ুন লেখকের বই *অসীম সমীকরণ*।