পঞ্চম অধ্যায়

অসীম শূন্য

শূন্য এবং বৈজ্ঞানিক বিপ্লব

গণিত সাধারণত নীতিতে অনড় থাকে। কিন্তু অসীম পরিমাণ বড় অপ ছোট জিনিসের আগমন গণিতকে নীতিতে আপোষ করতে অভ্যস্ত করল। গাণিতক বিষয়সমূহের পরম ///বৈধতা/// ও অখণ্ডনীয় প্রমাণের আদিম অবস্থা চিরতরে বিদায় নিল।বিতর্কের যুগের উদ্বোধন হলো। আমরা সে বিন্দুতে পৌঁছে গেলাম, যেখানে মানুষ অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ করে বুঝে-শুনে নয়, বরং বিশ্বাসের জায়গা থেকে। কারণ, এখন পর্যন্ত এর ফলাফল সঠক এসেছে।

-- ফ্রিদরিখ এংগেলস।

শূন্য এবং অসীম এরিস্টটলীয় দর্শনকে গুঁড়িয়ে দিয়েছিল। শূন্যতা ও অসীমতা বাদামের খোসার মহাবিশ্বকে ধারণা বাতিল করে দিয়েছিল। বাতিল করে চিয়েছিল প্রকৃতির শূন্যস্থানকে অপছন্দ করার ধারণা। প্রাচীন জ্ঞান হয়ে গেল মূল্যহীন। বিজ্ঞানীরা প্রকৃতির ক্রিয়াকৌশল বিষয়ক সূত্র তৈরি করছিলেন। তবে এ বৈজ্ঞানিক বিপ্লবের মধ্যেও একটি অসুবিধা থেকে গেল: শূন্য। বিজ্ঞান জগতের তক্ষণ নতুন শক্তিশালী হাতিয়ার ক্যালকুলাস। কিন্তু এর গভীরে লুকিয়ে থাকল একটি প্যারাডক্স১। ক্যালকুলাসের উদ্ভাবক আইজ্যাক নিউটন ও গটফ্রিড উইলহেলম লিবনিজ///চেক বানান ও উচ্চারণ///। শূন্য দিয়ে ভাগ আর অসীমসংখ্য শূন্যকে যোগ করে তারা বানিয়ে ফেলেন গণিতের সবচেয়ে শক্তিশালী অস্ত্র। দুটো কাজই অবৈধ। এ যেন ১ + ১ = ৩ লেখা। মৌলিকভাবে ক্যালকুলাস গাণিতিক যুক্তি মেনে চলেনি। একে গ্রহণ করতে হলে নিতে হয় বিশ্বাসের আশ্রয়। বিজ্ঞানীরা তা করলেন। কারণ ক্যালকুলাস হলো প্রকৃতির ভাষা। এ ভাষাটা ভাল করে বুঝতে হলে অসীম শূন্যকে জয় করা চাই।

ইউরোপ ঘুমিয়ে কাঁটাল এক হাজার বছর। খৃষ্টীয় ফাদাররা দারুণ দক্ষতায় সে ঘুমের খাইয়ে দিয়েছিল। ইউরোপীয়রা সে ঘুম থেকে জেগে উঠল শূন্যকে সাথে নিয়ে।

-- টোবিয়াস ড্যান্টসিগ, নাম্বার: দ্য ল্যাংগুয়েজ অব সায়েন্স

শূন্যের অভিশাপ গণিতকে দুই হাজার বছর তাড়ীয়ে বেড়িয়েছিল। মনে হচ্ছিল অ্যাকিলিজকে আজীবন কচ্ছপের পেছনে ছুটতে হবে। ধরতে পারবে না কখনোই। জেনোর সরল ধাঁধাঁর মধ্যে লুকিয়ে ছিল অসীম। অ্যাকিলিজের অসীম ধাপ গ্রিকদের হতবুদ্ধি করে দিয়েছিল। তারা অসীম পদক্ষেপকে যোগ করার কথা ভাবেনি কভুও। যদিও অ্যাকিলিজের পদক্ষেপ ক্রমেই ছোট হয়ে শূন্যের দিকে এগোচ্ছিল। শূন্যের ধারণা ছাড়া আসলে এ যোগ করার সাধ্য তাদের ছিল না। তবে পশ্চিম শূন্যকে গ্রহণ করে নিলে গণিতবিদরা অসীমকে করায়ত্ত্ব করলেন। শেষ হলো অ্যাকিলিজের রেস।

জেনোর ধারায় অসীম অংশ আছে, সত্য। তবুও আমরা সবগুলো পদক্ষেপ যোগ করতে পারি। এরপরেও পাব সসীম মান। ১ + ১/২ + ১/৪ + ১/৮ + ... = ২। এ কৌশল প্রথম খাটান ব্রিটিশ যুক্তিবিদ রিচার্ড সুইসেথ। অসীম পদকে যোগ করে সসীম মান বের করেন তিনি। তিনি সংখ্যার একটি অসীম ধারা নেন। ১/২, ২/৪, ৩/৮, ৪/১৬, ..., n/2^n,…। এবার এদেরকে যোগ। পাওয়া যাচ্ছে দুই। দেখাই যাচ্ছে, ধারার সংখ্যাগুলো ক্রমেই শূন্যের কাছাকাছি হচ্ছে। কেউ হয়ত বলে ফলবেন, এ কারণই তো সসীম মান আসার জন্য যথেষ্ট। হায়! অসীম যদি এত সরল হত!

প্রায় একই সময়ের কথা। ফরাসি গণিতবিদ নিকোল ওরেম কাজ করছিলেন আরেকটি অসীম সংখ্যার ধারা নিয়ে। গালভরা নাম তরঙ্গ ধারা।

১/২ + ১/৩ + ১/৪ + ১/৫ + ১/৬ + ... জেনো এবং সুইসেথের ধারার মতোই পদগুলো শূন্যের দিকে যাচ্ছে। কিন্তু সুইসেথ এদেরকে যোগ করতে গিয়ে দেখেন, যোগফল ক্রমেই বড় থেকে আরও বড় হচ্ছে। প্রত্যেকটা পদ আলাদাভাবে শূন্যের দিকে গেলেও যোগফল যাচ্ছে অসীমের দিকে। পদগুলোকে গুচ্ছে গুচ্ছে রেখে ওরেম এটা দেখান। ১/২ + (১/৩ + ১/৪) + (১/৫ + ১/৬ + ১/৭ + ১/৮) + ...। প্রথম গুচ্ছের মান ১/২। পরের গুচ্ছ (১/৪ + ১/৪) বা ১/২-এর চেয়ে বড়। (কারণ তিন ভাগের এক ভাগ চার ভাগের এক ভায়ের চেয়ে বেশি) একইভাবে পরের গুচ্ছ (১/৮ + ১/৮ + ১/৮ + ১/৮) বা ১/২-এর চেয়ে বড়। এভাবেই চলছে। ক্রমেই ১/২ করে যোগ হচ্ছেই। যোগফলও বড় হচ্ছে। যাচ্ছে অসীমের দিকে। পদগুলো শূন্যের দিকে গেলেও তা যথেষ্ট দ্রুত হারে হচ্ছে না। তার মানে, সংখ্যারা নিজেরা শূন্যের দিকে গেলেও অসীম সংখ্যার যোগফল অসীম হতে পারে। তবুও অসীম যোগফলের সবচেয়ে বিস্ময়কর দিক কিন্তু এটা নয়। শূন্য নিজেও অসীমের অদ্ভুত বৈশিষ্ট্য থেকে মুক্ত নয়।

এই ধারাটার কথা ভাবুন:

১ - ১ + ১ – ১ + ১ - ১ + ১ – ১ + ১ - ...

এর যোগফল শূন্য দেখানো কঠিন কিছু নয়। কত সহজ কাজ:

(১ – ১) + (১ – ১) + (১ – ১) + (১ – ১) + (১ – ১) + ... = ০ + ০ + ০ + ০ + ০ + ...

অতএব শূন্য। কিন্তু অন্যভাবে দেখুন।

১ + (-১ + ১) + (-১ + ১) + (-১ + ১) + (-১ + ১) + (-১ + ১) + …

একে লেখা যায়

১ + ০ + ০ + ০ + ০ + ০ + …

যার মান ১। শূন্যের অসীম যোগফল একইসাথে ০ ও ১ হতে পারে। ইতালীয় পুরোহিত গুইডো গ্রান্ডি তো এই ধারা দিয়ে প্রমাণ করেন ঈশ্বর শূন্য (০) থেকে মহাবিশ্ব (১) সৃষ্টি করতে পারেন। আসলে এই ধারাকে যেকোনো কিছুর সমান প্রমাণ করা যায়। তা করতে হলে ১ ও (-১) এর বদলে ৫ ও (-৫) দিয়ে শুরু করুন (অথবা মূল ধারা থেকেই ৫টি ১ বের করে নিয়ে বাকিদেরকে (১ - ১) + (১ – ১) + ... এভাবে লিখুন।

অসীমসংখ্যক জিনিসকে নিজেদের সাথে যোগ করলে অদ্ভুত ও অস্বাভাবিক ফলাফল পাওয়া যায়। কখনো সংখ্যারা শূন্যের দিকে যোগফল হয় নির্দিষ্ট কোনো সংখ্যা। ২ বা ৫৩-এর মতো নাদুসনুদুস কোনো সংখ্যা। কখনো আবার যোগফল ধেয়ে চলে অসীমের দিকে। শূন্যের অসীম যোগফল আবার যেকোনো কিছুর সমান হতে পারে। কী অদ্ভুত কাণ্ড ঘটে চলছে! কেউ জানত না কীভাবে অসীমকে করায়ত্ত্ব করা যায়।

ভাগ্য ভাল যে গাণিতিক জগতের চেয়ে ভৌত জগতটাকে বেশি অর্থবহ লাগে। বাস্তব জগতে কাজ করলে আর অসীমসংখ্যক জিনিসকে যোগ করাটা কাজেও আসে। যেমন ধরুন পাত্রের আয়তন বের করতে গেলে কাজটা করা লাগতে পারে। ১৬১২ সাল ছিল এমন কাজের উপযুক্ত একটি সময়।

এখানেও নায়ক জোহানেস কেপলার। যিনি গ্রহদের উপবৃত্তাকার পথের প্রমাণ দিয়েছিলেন। ঐ বছরটিতে তিনি পাত্রের আয়তন নিয়ে মগ্ন থাকেন। তিনি খেয়াল করেছিলেন পাত্রের নির্মাতা ও ব্যবহারকারীরা কাজটা করে খুব কাঁচা হাতে। কেপলার তাদের সাহায্যে কাজে নেমে পড়লেন। মনে মনে তিনি পাত্রকে অসীমসংখ্যক অসীম পরিমাণ ক্ষুদ্র খণ্ডে বিভক্ত করলেন। এরপর আবার তাদেরকে জোড়া দিয়ে পাত্রের আয়তন বের করলেন। পাত্রের পরিমাপের পেছনমুখী পদ্ধতি মনে হতে পারে একে। তবে ভাবনাটি ছিল চমৎকার।

তথ্যনির্দেশ

১। স্ববিরোধী বক্তব্য বা দেখতে এক আসলে আরেক এমন জিনিসকে প্যারাডক্স বলে। যেমন, কেউ বলল, "আমি মিথ্যাবাদী।" তাহলে কি লোকটি আসলে মিথ্যাবাদী নাকি সত্যবাদী? এ বিষয়ে বিস্তারিত জানতে পড়ুন লেখকের বই *অসীম সমীকরণ*।